2018-2019 Yılı, MAT 311 Kısmi Diferansiyel Denklemler I Final Sınavı 03.01.2019

Numara: İsim-Soyisim:

SORULAR

1. f yeteri kadar sürekli türevlere sahip keyfi fonksiyon olmak üzere $z = xyf(zx + y)$ şeklinde verilen yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemi bulunuz. Burada z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenlerdir.
2. $xp - yq = z$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $(p = z_x, q = z_y)$.
3. $(y + zx)p - (x + yz)q = x^2 - y^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. $(p = z_x, q = z_y)$
4. $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} - z = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

CEVAPLAR

1) $z_x = yf(zx+y) + xyf'(zx+y).(z_x x + z)$

$z_y = x f(zx+y) + xyf'(zx+y)(z_y x + 1)$

$z_x = \cancel{y}\dfrac{z}{x\cancel{y}} + xyf'(zx+y)(z_x x + z)$

$z_y = \dfrac{\cancel{x}z}{\cancel{x}y} + xyf'(zx+y)(z_y x + 1)$

$$\frac{z_x - \frac{z}{x}}{z_x x + z} = \frac{z_y - \frac{z}{y}}{z_y x + 1}$$

$\cancel{xz_xz_y} + z_x - zz_y - \dfrac{z}{x} = \cancel{xz_xz_y} - \dfrac{x}{y}zz_x + zz_y - \dfrac{z^2}{y}$

$z_x - 2zz_y - \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}zz_x + \dfrac{z^2}{y} = 0$

$\left(1 + \dfrac{x}{y}z\right)z_x - 2zz_y = \dfrac{z}{x} - \dfrac{z^2}{y}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = -\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$

$\ln y + \ln x = \ln c \rightarrow \begin{array}{l} \xi = xy \\ \eta = y \end{array}$

$p = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = z_\xi y$

$q = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = z_\xi x + z_\eta$

$\rightarrow x z_\xi y - y x z_\xi - y z_\eta = z$

$-\eta z_\eta = z$

$-\frac{dz}{d\eta} = \frac{z}{\eta} \rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{d\eta}{\eta} = 0 \rightarrow \ln z + \ln \eta = \ln f(\xi)$

$\ln z\eta = \ln f(\xi) \rightarrow z\eta = f(\xi) \rightarrow z = \frac{1}{\eta} f(\xi)$

$\rightarrow z = \frac{1}{y} f(xy)$

3) $(y+zx)p - (x+yz)q = x^2 - y^2$

$\frac{dx}{y+xz} = \frac{dy}{-x-yz} = \frac{dz}{x^2-y^2}$

$\frac{x\,dx}{xy+x^2z} = \frac{y\,dy}{-yx-y^2z} = \frac{-z\,dz}{-x^2z+y^2z}$

$x\,dx + y\,dy - z\,dz = 0 \rightarrow u = x^2+y^2-z^2$

$\frac{y\,dx}{y^2+xzy} = \frac{x\,dy}{-x^2-xyz} = \frac{dz}{x^2-y^2}$

$y\,dx + x\,dy + dz = 0 \rightarrow v = xy + z$

$$F(u,v) = F(x^2+y^2-z^2,\ xy+z) = 0$$

$x^2+y^2-z^2 = f(xy+z)$ ya da $xy+z = f(x^2+y^2-z^2)$

4) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} - z = 0$

$(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 - 1)z = 0$

$[(D_x - D_y)^2 - 1]\,z = 0$

$(D_x - D_y - 1)(D_x - D_y + 1)z = 0$

$L_1 z = (D_x - D_y - 1)z = 0$ için $z_1 = e^{x} f_1(x+y)$

$L_2 z = (D_x - D_y + 1)z = 0$ için $z_2 = e^{-y} f_2(x+y)$

$z = z_1 + z_2$

$= e^{x} f_1(x+y) + e^{-y} f_2(x+y)$